Hvad er en god matematiklærer?
- ifølge matematikdidaktisk forskning
- fokus på et kompetenceperspektiv

Morten Blomhøj, IMFUFA, NSM Roskilde Universitet

Holmboesymposiet, 19. maj 2008, Oslo

Disposition

1. Hvorfor er det et interessant spørgsmål og et første svar
2. En kompetencebaseret bestemmelse af matematiklærer-faglighed:
   - fagdidaktiske og pædagogiske kompetencer
   - matematikfaglige kompetencer

   Eksempler på samspil mellem fagdidaktiske og matematikfaglige kompetencer og refleksioner:
3. Projekt om symbolbehandling i 9. kl. og gymnasiet
4. Matematikmorgener - matematisk modellering i 9. kl.
5. Systemniveauer i matematiklærerfaglighed
   Hvor mangler der forskning?

1. Hvorfor er det et interessant spørgsmål?

I matematik har læreren afgørende betydning for elevernes læring og for deres oplevelser af og holdninger til faget.

Grunduddannelse spiller tilsyneladende kun en mindre rolle i udviklingen af læreres undervisningspraksis.

Karakterisering af den gode matematiklærer er væsentlig for udvikling af matematikundervisningens praksis gennem efteruddannelse og pædagogisk udvikling.

Karakterisering af den gode matematiklærer er naturligvis kontekstafhængig. Jeg forudsætter her, at læreren har relativ autonomi – som det (endnu) er i Danmark og Norge.

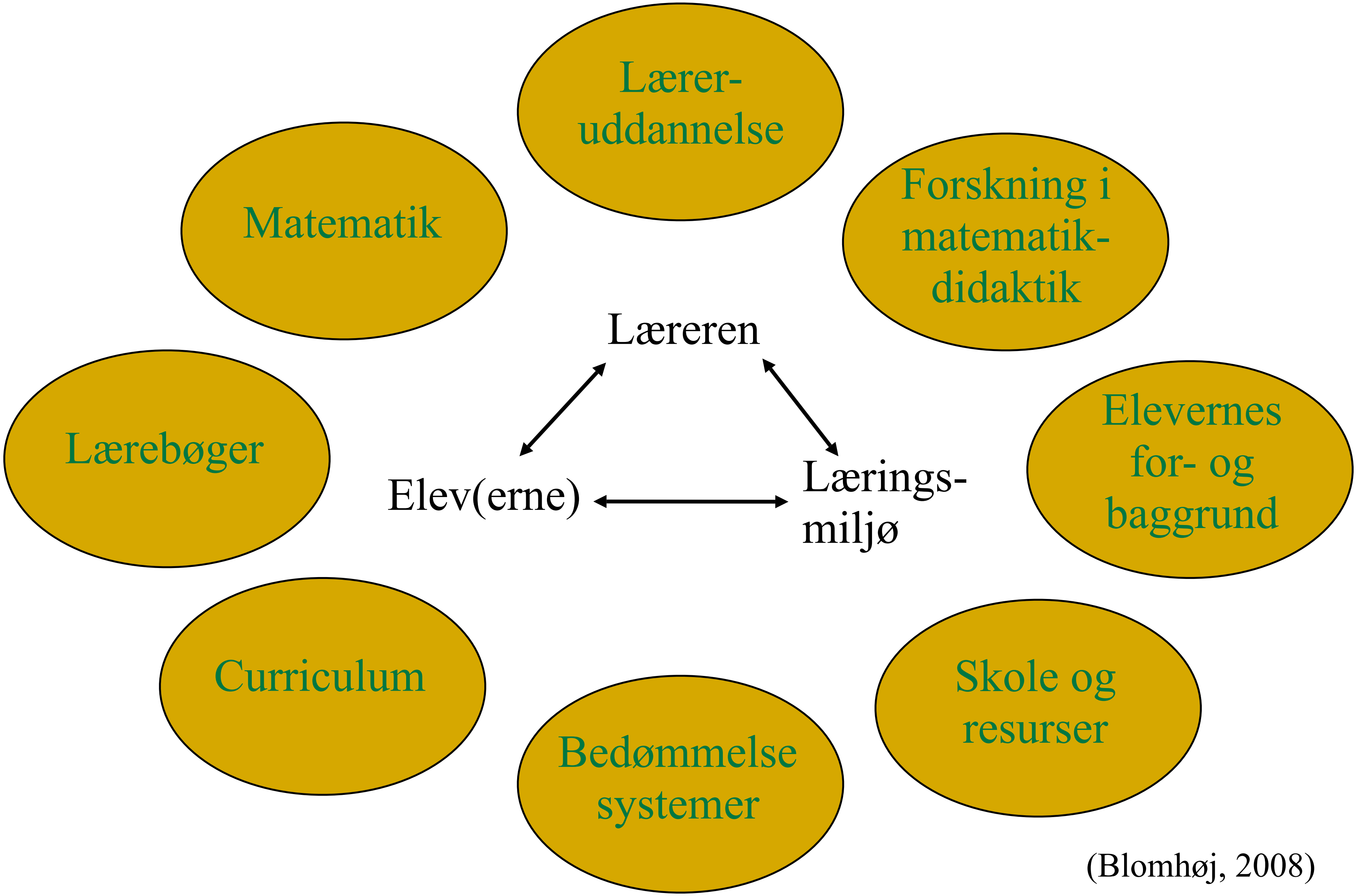
Læreren spiller en central rolle i genstanden for matematikdidaktisk forskning.

Genstandsfeltet for matematikkens didaktik

Matematikkens didaktik er det videnskabelige arbejdsfelt, der søger at bestemme, karakterisere og forstå de fænomener og processer, der indgår - eller kun indgå - i matematikundervisning og -læring. Sigtet er at klarlægge mulige årsagssammenhænge med henblik på at udvikle og forbedre matematikundervisning.

(Niss, 1993, s. 100)

Genstandsområdet for matematikdidaktisk forskning



(Blomhøj, 2008)

1. En første karakteristik af en god matematiklærer

rummer i det væsentlige fire elementer:

- Personlige egenskaber som engagement, empati, gennemslagskraft, nysgerrighed og åbenhed.
- Almen pædagogisk og didaktiske kompetence
- Fagdidaktiske kompetence
- Matematikfaglig kompetence

Den gode matematiklærer er en fagligt kompetent og fagdidaktisk reflekteret lærer, der kan etablere en frugtbar kontakt til eleverne i undervisningen.

Læreruddannelsens udfordring er at udvikle de studerendes faglige og didaktiske kompetence og navnlig skabe sammenhænge og forbindelse til undervisningspraksis. Herved kan læreruddannelsen også bidrage til en personlige dannelse der kan støtte funktionen som matematiklærer.

2. En kompetencebaseret bestemmelse af matematik- lærerfaglighed

En kompetence er en persons potentiale og vilje til at udføre en bestemt type aktivitet i givne sammenhænge.

Kompetence integrerer holdninger, indsigt, viden og færdigheder.

Kompetencer udvikles/læres gennem aktiviteter, der forudsætter deres anvendelse.

En kompetence er i udgangspunktet bundet til det domæne af kontekster, der udspændes af de konkrete aktiviteter, der ligger til grund for kompetencens udvikling.

Tilstedeværelsen af en kompetence hos en person kan kun bedømmes indirekte gennem analyse af personens virksomhed.

(Niss & Højgaard Jensen, 2002)

2. Fagdidaktiske og pædagogiske kompetencer i matematiklærerfaglighed

- **Læseplanskompetence**
  - at kunne sætte sig ind i, analysere og forholde sig til læreplaner, samt selv at kunne udforme forskellige former for læreplaner inden for givne rammer
- **Undervisningskompetence**
  - at kunne udtænke, tilrettelægge og gennemføre undervisningsforløb og –aktiviteter
  - at kunne finde og udvælge eller udvikle samt anvende hensigtsmæssige undervisningsmaterialer
  - at kunne motivere og inspirere elverne
  - at kunne diskutere og begrunde undervisningens form og indhold i forhold til elever og forældre, m.fl.

2. Fagdidaktiske og pædagogiske kompetencer i matematiklærerfaglighed

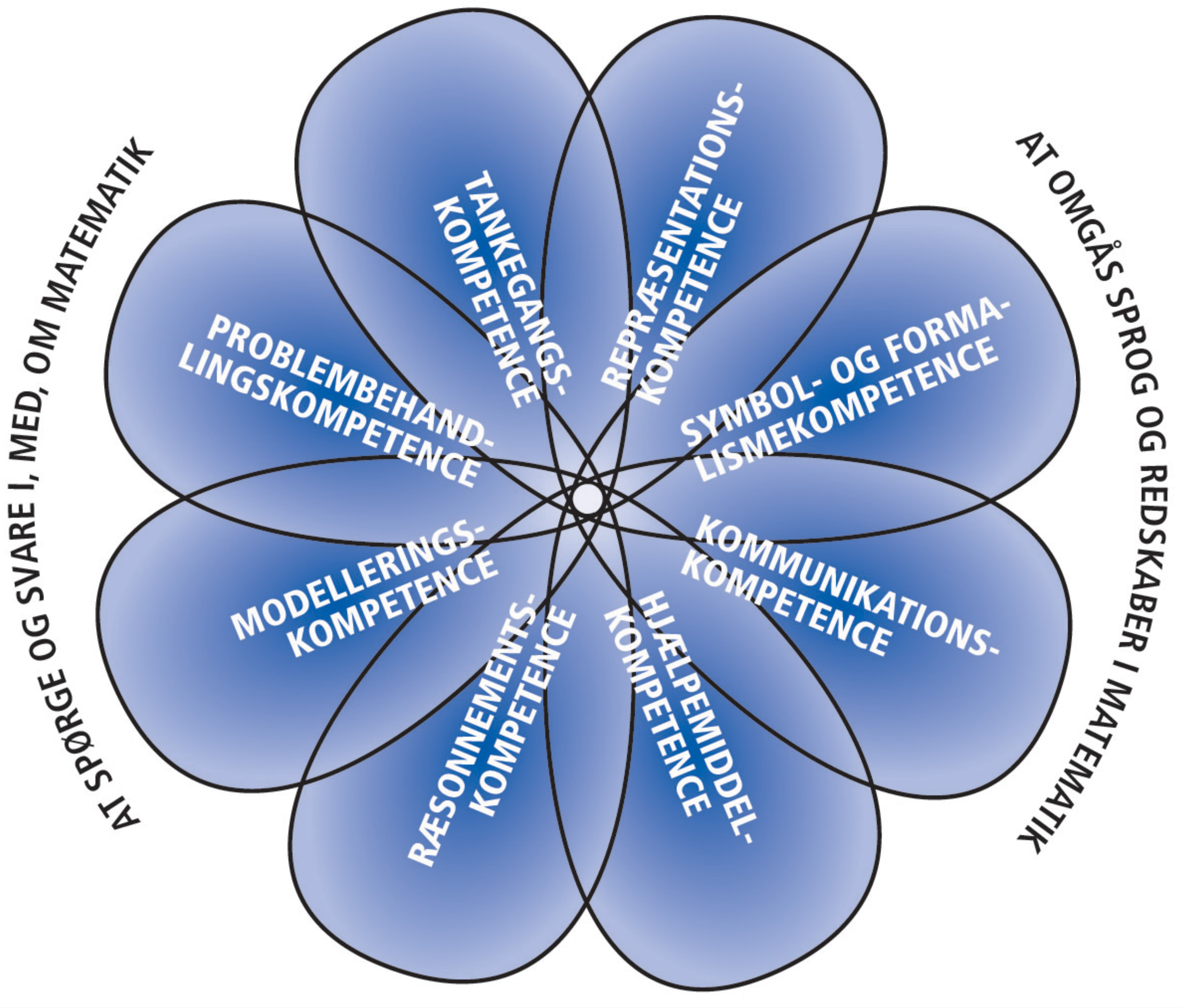
- **Læringsafdækningskompetence**
  - at kunne opdage og være opmærksom på tegn på elevernes faktiske matematiklæring
  - at kunne udfordre specifikke elementer af elevernes matematikkompetencer og matematikforståelse
  - at kunne afdække og fortolk elevernes matematik- læring og –kompetencer i deres konkrete aktiviteter
  - at kunne spore den udviklingen i elevernes matematiklæring
- **Evalueringskompetence**
  - at kunne udvælge eller udvikle og anvende hensigtsmæssige instrumenter til såvel formativ som summativ evaluering af elevernes læring

2. Fagdidaktiske og pædagogiske kompetencer i matematiklærerfaglighed

- **Samarbejdskompetence**
  - at kunne indgå i samarbejde om undervisningens tilrettelæggelse med kollegaer både fag- og kollegaer med andre fag
  - at kunne samarbejde med ledelsen og forskellige fagpersoner samt forældre om enkelte elevers problemer
- **Professionel udviklingskompetence**

  Det er en meta-kompetence, der omfatter
  - at kunne indgå i og forholde sig efter- og videreuddannelsesmuligheder – livslang læring
  - at kunne indgå i og tage initiativ til udviklings- arbejde

Kompetencebaseret bestemmelse af matematikfaglighed



De otte kompetencer fra KOM-projektet:

Hver af kompetencerne består i at være i stand til udøve bestemte typer af matematiske aktiviteter (”indsigtsfuld beredthed til at handle…”)

K1 Tankegangskompetence:

At kunne udøve matematisk tankegang, herunder at kunne *stille* og *behandle spørgsmål* som er karakteristiske for matematik, at *kende*, *forstå* og *håndtere* matematiske *begrebers rækkevidde*, at kunne forstå *abstraktion* og *generalisering*.

K2 Problembehandlingskompetence:

At kunne formulere og løse matematiske problemer, herunder at kunne detektere, *formulere*, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske *problemer*, samt *løse* færdigt formulerede matematiske *problemer.*

K3 Modelleringskompetence:

At kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter, herunder at kunne *afmatematisere*, *analysere og bedømme* foreliggende modeller; at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng.

(Blomhøj & Højgaard Jensen, 2007b)

K4 Ræsonnementskompetence:

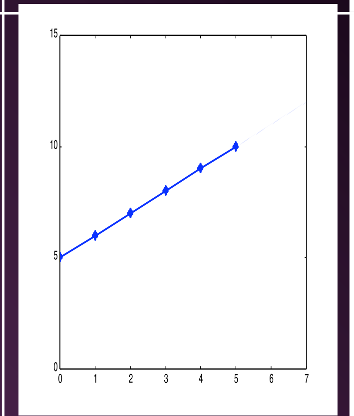
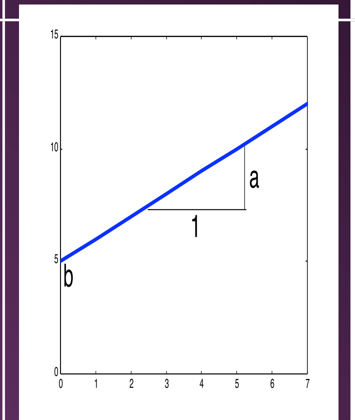
At kunne ræsonnere matematisk, herunder at kunne følge og bedømme et matematisk ræsonnement; at vide og forstå hvad et matematisk bevis (ikke) er; at kunne afdække de bærende idéer i et matematisk bevis; at kunne udtænke og gennemføre uformelle og formelle ræsonnementer, herunder beviser.

K5 Repræsentationskompetence:
At kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold, herunder

- at kunne *forstå* og *betjene sig af* forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer;
- at kunne forstå de indbyrdes *forbindelser* mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold, samt have kendskab til deres respektive styrker og svagheder;
- at kunne *vælge* blandt og *oversætte* imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål.

D16

Proces og objekt dualitet for "*y* = *x* + 5" og "*y* = *ax* + *b*".

Repræsen-tationsform	Sproglig	Numerisk	Algebraisk	Grafisk
Proces	Jeg er fem år ældre end min bror. Jeg ganger med a og lægger b til.	y-værdien fås ved at lægge 5 til x-værdien. y er funktion af x og y=f(x) fås ved at ind-sætte x-værdi.	$f(x+1)=f(x)+1$ $f(0)=5$ $f(x+\Delta x)=$ $f(x) + a\Delta x;$ $f(0)=b$	
Objekt	Punkter (x,y), hvor y er 5 større end x. En lineær kombination med konstant sum.	x 0 1 2 3 y 5 6 7 8 En funktions-tabel	$y = x + 5$ $f(x) = ax + b$	

K6 Symbol- og formalismekompetence:

At kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme, herunder

- at *afkode* symbol- og formelsprog;
- at *have indsigt i* karakteren af og spillereglerne for formelle matematiske systemer;
- at *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog;
- at *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler.

K7 Kommunikationskompetence:

At kunne kommunikere i, med, og om matematik**,** herunder at *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og ”tekster”; at *udtrykke sig* på forskellige måder om matematikholdige anliggender, skriftligt, mundtligt eller visuelt, over for forskellige kategorier af modtagere.

K8 Hjælpemiddelskompetence:

At kunne omgås hjælpemidler for matematisk virksomhed, herunder at *have kendskab til* eksistensen og egenskaberne ved sådanne hjælpemidler for matematisk virksomhed, og at have indblik i deres *muligheder og begrænsninger;* samt at være i stand til på reflekteret vis at *betjene sig af* sådanne hjælpemidler.

Tre former for overblik og dømmekraft overfor matematik

Foruden de otte kompetencer omfatter matematik beherskelse også tre former for overblik og dømmekraft i forhold til matematik som helhed. Der drejer sig om:

(a) Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksis områder.

(b) Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning.

(c) Matematikken karakter som fagområde

3. Symbolbehandlingskompetence og sammen-hængsproblemer mellem skole og gymnasium

Matematiske kernekompetencer i folkeskole, i de gymnasiale uddannelser og i læreruddannelsen.

Et udviklings- og forskningsprojekt ved CVU-Fyn.
Fokus på symbolbehandlingskompetence:

Hvordan kan man karakterisere, udvikle og evaluere symbolbehandlingskompetence i matematik-undervisningen i skole, gymnasium og læreruddannelse?

(Blomhøj & Højgaard Jensen, 2007a)

Forløb om talfølger og symbolbehandling i 9. kl.

På 9. klassetrin omfatter symbolbehandligskompetence at kunne:

- udføre simple algebraiske operationer på givne symboludtryk.
- vælge og følge en hensigtsmæssig fremgangsmåde for løsning af ligninger og uligheder.
- kontrollere mulige løsninger til ligninger og uligheder.
- forudse og kontrollere resultatet af simple algebraiske operationer på symboludtryk.
- lave hensigtsmæssige grafiske repræsentationer af symboludtryk.
- undersøge symbolske udtryk ved at lave tabeller eller andre talmæssige repræsentationer.

Og at kunne:

- opstille simple symboludtryk til beskrivelse af sammenhænge præsenteret i almindeligt sprog.
- vælge hensigtsmæssigt mellem ækvivalente algebraiske udtryk i forhold til et givet formål.
- læse mening ind i et algebraisk udtryk ved at fortolke de indgående variable og deres relationer i forhold til en given eller selvvalgt kontekst.

Kun en begrænset del af disse aspekter ved symbol-behandlings-kompetence indgår i grundskolens afsluttende prøver og i de mest anvendte lærebøger.

I projektet blev en sådan symbolbehandlingskompentence vurderet som relevant og som noget der blev taget for givet i gymnasiet, men som mange elever har problemer med.

Konstrueret dialog til pyramidetrappen

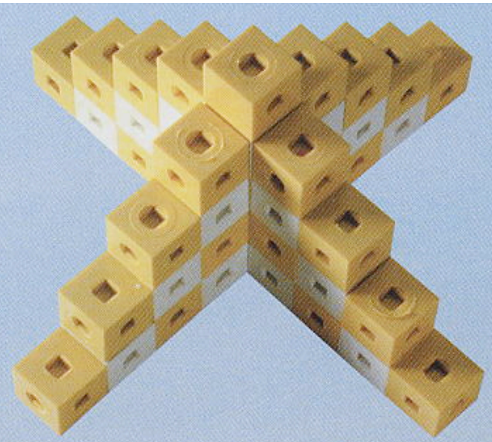
(opgave 44 Matematrix 8, side 33).

i alt 49 klodser?

44 a Undersøg sammenhængen mellem antal trin og antal klodser i ”pyramidetrappen”.

b Hvor mange klodser skal der bruges til en trappe med højden 10?

Prøv selv at bygge figurer, der opfylder nogle bestemte krav.
Prøv også at opstille formler for figurerne.



Dialogen er tænkt som illustration af, hvordan den mest udviklede symbolbehandlingskompetence på 9. klassetrin kan komme til udtryk i forbindelse med denne opgave.

L: Hvad laver I?
E1: Opgave 44
L: Den med trappepyramiden?
E2: Ja, den er lidt svær.
L: Har I prøvet at lave en tabel over hvor mange klodser, der skal bruges til en trappe med forskellige antal trin.
E1: Nej, ikke endnu. Vi kan ikke rigtig komme i gang.
L: Hvad hvis der skal være nul trin på trappen?
E2: Nul trin?
L: Ja, nul trin.
E2: Så er der jo ingen trappe.
L: Ja, det er rigtigt. Hvor mange klodser skal der så bruges?

E1: Nul klodser (lidt tvivlende).

L: Ja, nul. Det er rigtigt. Hvad så med ét trin?

E2: Så skal der vel bruges én klods.

L: Ja, nemlig. Så har I to tal til jeres tabel. Prøv om I kan finde ud af hvordan det så udvikler sig?

Læreren går og kommer tilbage efter nogle minutter.

L: Hvordan går det?

E1: Der skal bruges 6 til to trin og 15 – tror vi – til tre trin.

Eleverne har lavet tabellen:

Trin	0	1	2	3
Klodser	0	1	6	15

L: Kan I se systemet?

E2: Nej, ikke rigtigt.

L: Så prøv at tage den med tre trin, og se på lagene.

Efter nogle minutter har eleverne tegnet de tre lag:

L: Det er fint. Hvor mange klodser er der så i hvert af de tre lag?

E2: 1, 5 og 9.

L: Ja, og hvad så i det næste lag?

E1: Der må være 4 gange 3 plus 1. Det er 13.

L: Det er helt rigtigt, hvordan ser du det?

E1: Der er 4 rækker med 3 og så den i midten.

L: Så kan I sikkert også lave en formel, der viser hvor mange klodser, der er i det i'te lag?
I kan kalde antallet af klodser i det i'te lag for L_i .

E2: Det må være 4•i + 1.

L: Prøv om den passer for det 3. lag, altså med i=3?

E2: 4•3 + 1. Det er jo 13. Det passer ikke.

L: Nej, det gør det ikke. Hvordan kan det være?

E1: Det er det næste lag. Det 4. lag har 13 klodser.

L: Ja, hvad er der så galt med formlen?

E2: $L_{i+1} = 4 \cdot i + 1$.

L: Ja, det er nemlig helt rigtigt.
Kan I så også opstille en formel for den trinvise udvikling. Hvis vi siger vi kender antallet af klodser i trappen med i lag og kalder det for a_i.
Hvor mange er der så i trappen med i+1 lag?
Prøv først at sige det med ord.

E1: Dem der er i forvejen plus det nye lag.

L: Ja, netop. Kan I også skrive det som en formel.

E2: $a_{i+1} = a_i + 4 \cdot i + 1$.

L: Prøv om den virker. Og så kan I taste den ind i jeres regneark.

D29

Da læreren kommer tilbage har eleverne indtastet formlen i deres regneark og kopieret formlen op til i = 20.

L: Flot, nu kommer så den næste udforing i spørgsmål (c). Kan I opstille en formel, der udtrykke hvor mange, der skal bruges til en trappe med i trin direkte som funktion af i?

E1: Hvad mener du?

L: Ligesom i de andre opgaver, hvor I har lavet to formler. Én for den trinvise udvikling af følgen og én hvor man kan sætte numret direkte ind i et funktionsudtryk, og så beregne det tilsvarende tal i følgen. I skal altså finde en funktion, der har samme funktionstabel som den I har lavet i jeres regneark.

E2: Det bliver svært.
L: Ja måske, men hvorfor tror du det? Hvad tænker du?
E2: Jeg kan ikke lige se systemet. Der kommer jo mere og mere til for hvert nyt lag.
L: Ja, det er rigtigt. Måske kan det være en hjælp, at der står i opgaven, at I kan bruge jeres erfaringer fra de tidligere opgaver.
E1: Er det den med dobbelttrappen?
L: Hvad tænker du om den?
E1: Pyramidetrappen har en dobbelttrappe i sig.
[Eleven viser med hænderne, hvor dobbelttrappen er.]
L: Ja, og den har I allerede et funktionsudtryk for. Men hvad er der så tilbage, hvis man tager dobbelttrappen væk?

E2: To enkelttrapper?

L: Ja, men hvor mange trin har de?

E2: To trin, et mindre end dobbelttrappen.

L: Nemlig, fint så kan I sikkert også opstille et funktionsudtryk for pyramidetrappen ved udnytte jeres resultater fra enkelttrappen og dobbelttrappen. I kan f.eks. kalde funktionen for p(n) og lade n betegne antallet af trin i trappen.

Efter lidt tid når eleverne frem til følgende udtryk:

$$p(n) = n^2 + 2\,(n-1)n/2$$

De har kontrolleret funktionsforskriften i regnearket.

L: Superflot arbejde! Kan I regne lidt om på jeres funktionsudtryk?

Efter lidt tid når eleverne frem til:

$p(n) = n^2 + 2\,(n\text{-}1)n/2 \Rightarrow p(n) = 2n^2 - n$

L: Det er meget fint. Kan I se, man kunne også havet tænkt, at pyramidetrappen består af to dobbelttrapper minus det ene tårn i midten, der jo består af n klodser. Det giver netop $2n^2$-n.

L: Gælder formlen i øvrigt for alle n?

E2: Ja, det gør den - også for nul. Det giver nul.

L: Netop, men jeres formlen for antallet af klodser i det enkelte lag, $L_{i+1} = 4 \cdot i + 1$, gælder ikke for det nulte lag. Og her får man antallet af klodser i det 1. lag ved at sætte i=0.

4. Matematik Morgener

- nu med Morten & Mikael, som de Matematiske Modeller...........

Vækkeuret ringer!
Din hånd rammer uret, som falder på gulvet. Du får fat i det og slukker det med et suk.......
Du vender dig om på den anden side og prøver at forestille dig, at det er blevet lørdag. Men så mærker du den – lysten. Lysten til at komme i gang fordi der står Matematik morgener på skemaet. "Muntre Matematik Morgener med Morten & Mikael", tænker du.
Klokken 8:00 skal du være sammen med alle de andre.
En ny og spændende dag står forventningsfuld og venter på at blive taget i brug af netop dig!

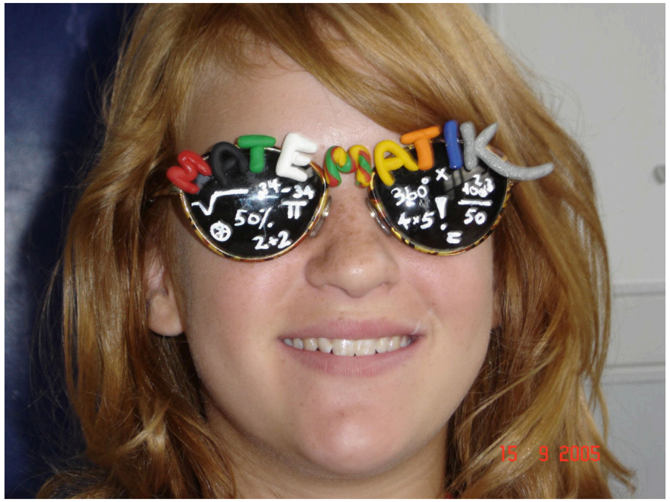
(Blomhøj & Skånstrøm, 2006)

Så tager du dine matematik-briller på, rejser dig fra din varme seng og går ud på badeværelset. Tjekker måske lige el-måleren undervejs?
På bade værelset smiler spejlet til dig, mens du søvndrukkent ser efter, om du er sluppet for bumser i løbet af natten.

Du børster tænder og forestiller dig måske, hvor sjovt det ville være at se, hvor lang en stribe du kunne lave, hvis du trykkede al tandpastaen ud......
Du lader det varme vand pjaske ned over din krop i flere minutter – hov, hvor meget vand gik der egentlig til det?

Der er også matematik i:

Klokken; vejret; værelset;
morgenmaden; rejseplanen;
cykelturen; blandt andet …..

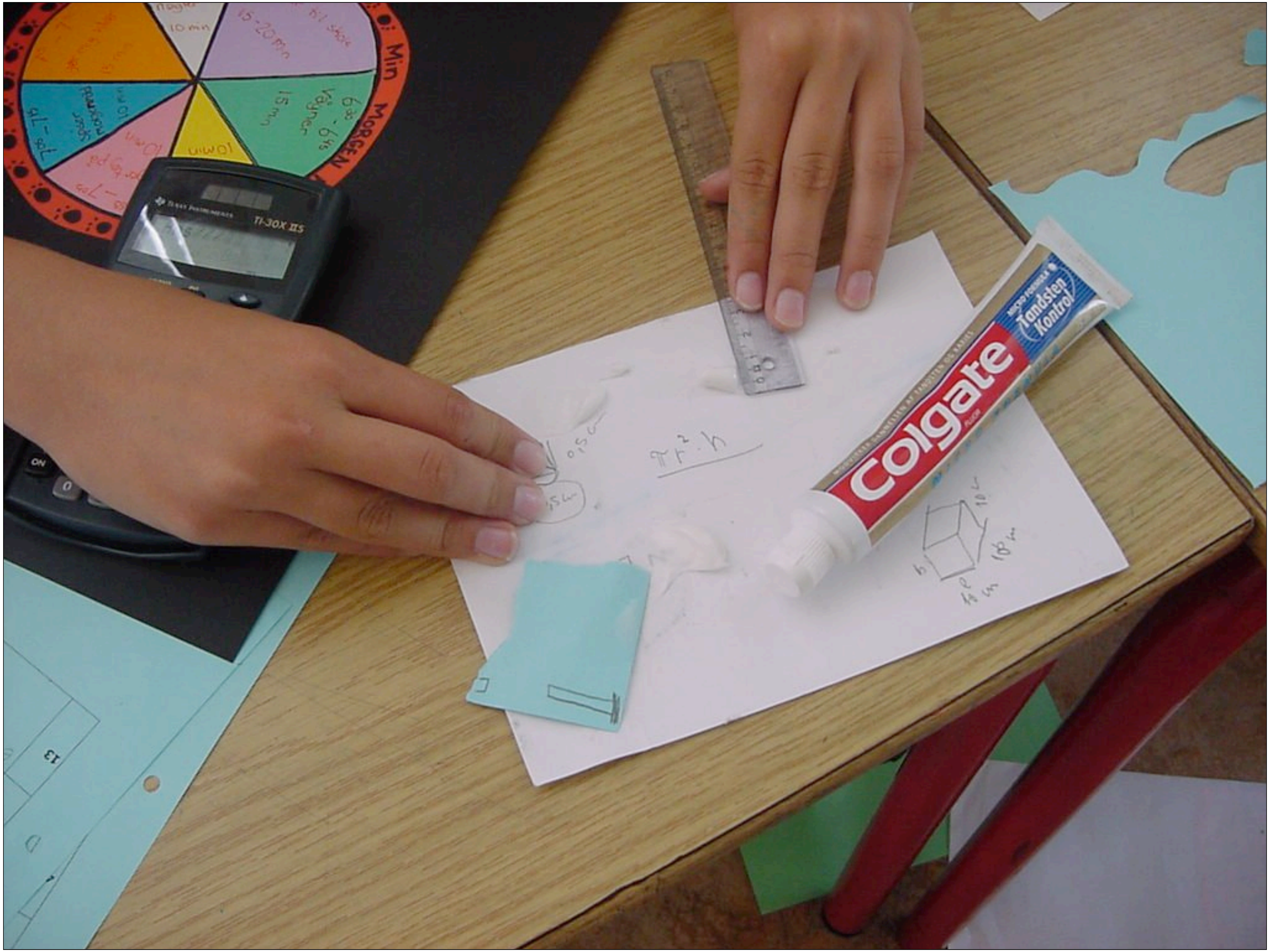


Opgaven:

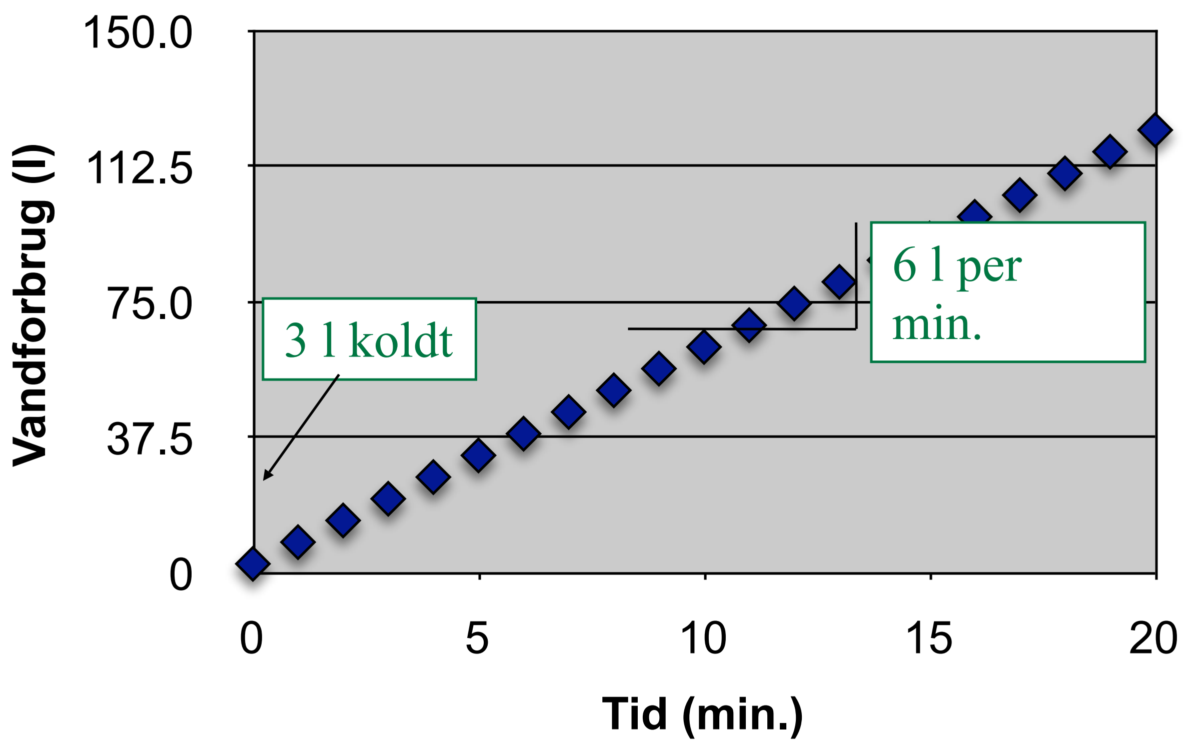
Lav nøjagtige optegnelser over det du ser med dine matematikbriller – fra du vågner til, du møder på skolen. Din notater skal så bearbejdes matematisk, og dine resultater og overvejelser skal formidles på et stykke A3-papir i et indbydende lay-out. Du har 4 moduler til det hele.


6.00-Ringede vækkeuret
6.01-Stod jeg op
6.03-Gik jeg i bad
6.10-Kom jeg ud af badet
6.13-Tog jeg tøj på
6.16-Redte jeg min seng
6.21-Dækkede jeg bord
6.23-Hældte jeg morgenmad op
6.25-Spiste jeg min morgenmad
6.37-Havde jeg spist min morgenmad
6.44-Pakkede jeg min skoletaske
6.52-Børstede jeg tænder
6.55-Vaskede jeg op
7.12-Slappede jeg af
7.35-Hentede jeg min cykel
7.37-Kørte jeg hjemmefra
7.51-Var jeg på skolen
EMil
højde i centimeter
alder
MORGENMADEN
havregryn
sukker
mælk i skål
mælk i krus
41%
40%
18%
1%
VANDFORBRUG VED TANDBØRSTNING
EMIL
METTE
ML
SEKUNDER

Røde biler
Laerke's
Matematik morgener!
Min MORGEN FRA 6³⁰ - 8⁰⁰
6³⁰ - 6⁴⁵ Vågner 15 min
6⁴⁵ - 6⁵⁵ går i bad 10 min
6⁵⁵ - 7⁰⁵ Tager tøj på 10 min
7⁰⁵ - 7¹⁵ Spiser morgenmad 10 min
7¹⁵ - 7³⁰ gør mig klar 15 min.
7³⁰ - 7⁴⁰ 10 min
7⁴⁰ - 8⁰⁰ Cykler til skole 15-20 min
På de 15 min. det tager at køre i skole så jeg 88 røde biler
Antal røde biler | På
5,9 | 1 min.
88 | 15 min
352 | 1 time
8448 | 1 døgn
59136 | 1 uge
Jeg har 24 tøj muligheder
Vand | På
16,8 L. | 1 dag
117,6 L. | 1 uge
320,8 L. | 1 måned
6299,6 L. | 1 år
1,5 cm
0,7 cm
Diameter(0,7) / 2 = radius (0,35)
R²·π·H = 0,6cm³
Der er 75 ml i en tandpasta tube og hver gang man børster tænder bruger man ca. 0,6 ml.
75 / 0,6 = 125 det vil sige at man kan børste tænder ca. 125 gange.

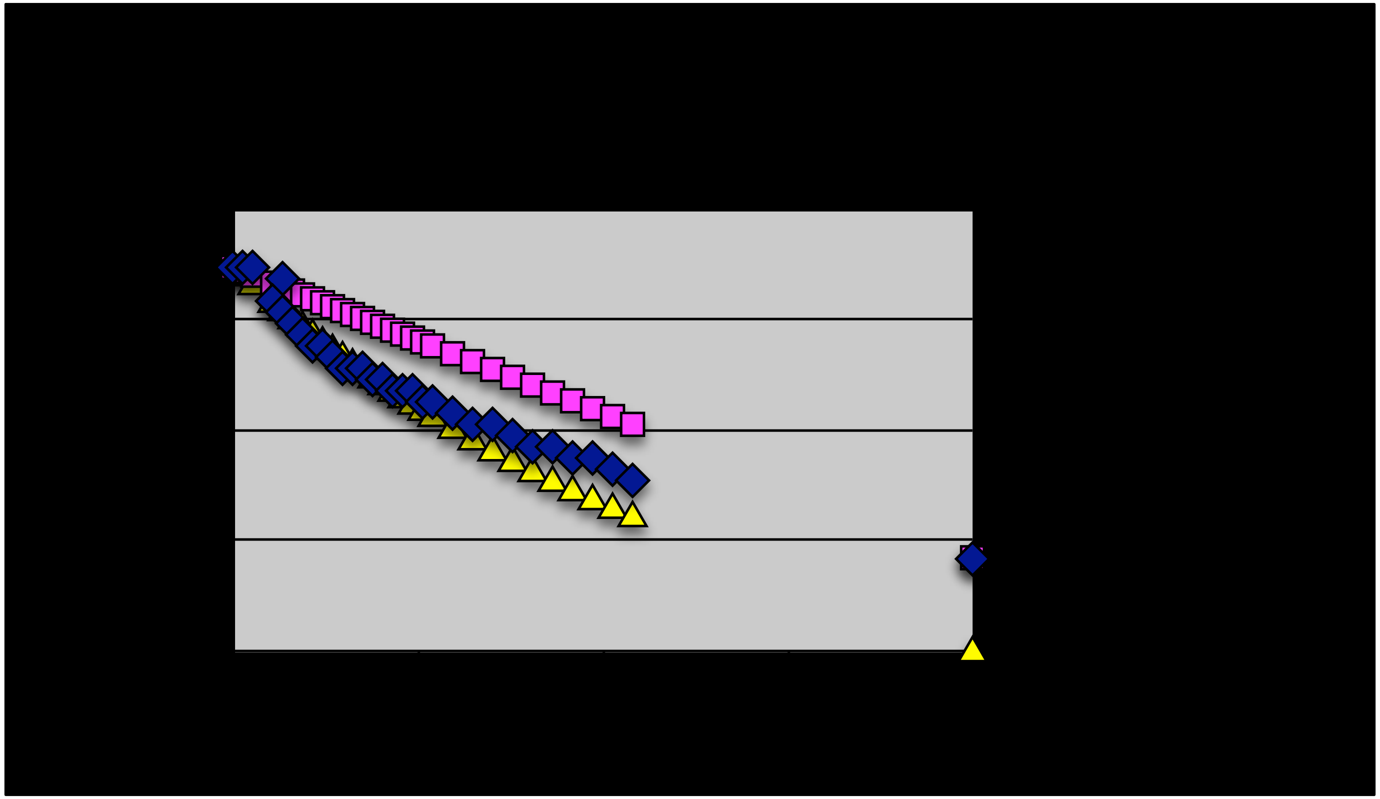

Min MORGEN
TI-30X IIS
Colgate
Tandsten Kontrol

Vandforbrug som funktion af badetid



y = 6x + 3. x er minutter jeg er i bad, og y er hvor mange liter vand jeg bruger. På 10 min. bruger jeg 63 l.

Mads' model for kakaoens temperatur



5. Systemniveauer i matematiklærerfaglighed - Hvor mangler der forskning?

Samfundet

Matematik

Skolen

Skolefaget

Klassen

Forløbet

Aktiviteten

Eleven

Tak for opmærksomhed

Hjertelig til lykke til
Elisabeth Aksnes, Bryne skule

Og held og lykke med forsat udvikling
af matematikundervisningen i skolen

Referencer

Blomhøj, M. (2008). *Ten major challenges for mathematics education research*. Foredrag ved ICMI's 100 års jubilæmskonference i Rom. Kommer i proceedings fra konferencen Arzarello, F. et al. (Eds.). http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/

Blomhøj, M., & Højgaard Jensen, T. (2007a). SOS-projektet - didaktisk modellering af et sammenhængsproblem. *MONA - Matematik- og Naturfagsdidaktik for undervisere, forskere og formidlere*, 2007(3), 25-53.

Blomhøj, M., & Højgaard Jensen, T. (2007b). What's all the fuss about competencies?. I Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H., & Niss, M. (red.). *Modelling and applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study International Commission on Mathematical Instruction* (s. 45-56). New York: Springer.

Blomhøj, M., & Skånstrøm, M. (2006). Matematik Morgener - matematisk modellering i praksis.. I Skovsmose, O., Blomhøj, M., & (red.). *Kunne det tænkes?: - Om matematiklæring* (s. 7-23). København: Malling Beck.

Niss, M. (1993). Centrale problemstillinger i matematikkens didaktik i 1990'erne. I Andersen, *15. Nordiske LMFK-kongres* (11-47). Konferencerapport. Århus: LMFK.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18.